第２章練習問題の解答

(1), (2): 本文中にある。

(3)　(i) まず対角線上に E を並べる：

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	?	
B	B	?	E	
C	C			E

(ii) 次に，並べ変え定理から，行または列内での重複をさけるためには，？の位置には C し か許されないことがわかる。これから後はやさしい。

(4)　$A^2 = E,\ B^2 = E$ に着目して(3)と同じように積表を作りはじめてみると，すぐに解決。

(5)　表 2.2 の積表を

	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

と書き直すと表2.6 の (a) の形になっている。これは巡回群である。

(6)　本文中に，位数 5 の群は巡回群であることが結論されているから， (2.5.5) で A を生成元　にえらび， $A^2 = B,\ A^3 = C,\ A^4 = D$ として積表を作ると，位数 5 の巡回群の積表が得られる。

	E	A	B	C	D
E	E	A	B	C	D
A	A	B	C	D	E
B	B	C	D	E	A
C	C	D	E	A	B
D	D	E	A	B	C

(7)　仮にある非可換群が巡回群だとすると，巡回群は常に可換群なので，これは矛盾。

(8)　巡回群の位数を g とし，その生成元を A とすると， $m < g$ ならば， $A^m \neq E$ 。いま，任意の２つの元， $A^p = A^q,\ p < q < g$ ，が等しいとすると， $A^{q-p} = E$ となって，矛盾。

(9)　位数 g の群の１つの元の位数が n であると，この群は位数 n の部分群を持っているから，定理(2.3.2) から g=mn と結論できる。

(10)　位数 g の群が真部分群を持たないとすると， E を除くすべての元の位数は g でなければならない。さもなければ，真部分群を持つ。この群はその任意の元を生成元とする位数 g の巡回群となる。

(11)　巡回群（位数 g ）の生成元の１つ（１つとは限らない）を A とすると，巡回群は
$G=\left\{A, A^2, A^3, \cdots\cdots\cdots, A^{g-1}, A^g=E\right\}$
と書ける。この群の元の位数を並びの順に $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots, m_{g-1}$ と書くと， $m_p \le g$ であり，問題 (9) から，すべて g の約数になっている。G の部分群が巡回群になることを確かめるために，まず任意の g は $g=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\cdots,$　 $(p,q,r,\cdots$ は素数）と分解されることに注意しよう。この素因数分解は唯１通りであることが知られているが，私達としては，上の G から出発して１段づつ分解することにして，各段階で得られる真部分群が上の G の形から常に巡回群であることに注目すれば， g の分解の最終段階ではすべての部分群の位数は素数なので，問題 (10) から，結局上の G のすべての部分群が巡回群であ ることがわかる。

(12)　位数６の群の元の位数は６の約数である 1, 2, 3, または６である。まず，明らかな可能性は位数６の巡回群である。

$G_6^{(1)}$

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	B	C	D	F	E
B	B	C	D	F	E	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	F	E	A	B	C
F	F	E	A	B	C	D

次に， A が位数３の元で部分群 $\left\{E, A, A^2\right\}$ があり， B はこの部分群に含まれない元の１つであるとすると
$G_6^{(2)}=\left\{E, A, A^2, B, AB, A^2B\right\}$
これは (2.7.7) の右剰余類分解にあたる。今から， $B^3=E$ と仮定すると矛盾に導かれること，従って， B は位数２であり，これが $G_6^{(2)}$ を与えることを示す。まず，仮定から， $B^2 \ne E$ ，もし $B^2=A$ ならば， $E=BA \to A^{-1}=B$ となって，矛盾。$B^2=A^2$ も， $E=BA^2 \to A=B$ となって，矛盾。だから，残る可能性は $B^2=B, B^2=AB, B^2=A^2B$ だが，これも $B=E, B=A, B=A^2$ となって，はじめの仮定と矛盾する。したがって， $B^3=E$ ではありえず， $B^2=E$ の可能性が残る。そこで， $B^2=E$ の条件の下で BA という元を調べよう。上と同様のやりかたで， $BA \ne E, A, A^2, B$ であることは，すぐわかる。残る可能性は， $BA=AB$ または $BA=A^2B$ 。まず， $BA=AB$ を調べる。
$B^2=E, A^3=E$ を使うと，
$(BA)^2=ABBA=A^2,\quad (BA)^3=BAA^2=B,\quad (BA)^4=BBA=A,$
$(BA)^5=BAA=BA^2,\quad (BA)^6=BABA^2=B^2A^3=E$
したがって，元 BA は位数６となり，これははじめの仮定， $A^3=E, B^2=E$ と矛盾。
残る可能性は，ただ $BA=A^2B$ だけ。$(BA)^2=BAA^2B=E$ に注意しながら， $G_6^{(2)}$ の積表を作ると

	E	A	A^2	B	AB	A^2B
E	E	A	A^2	B	AB	A^2B
A	A	A^2	E	AB	A^2B	B
A^2	A^2	E	A	A^2B	B	AB
B	B	A^2B	AB	E	A^2	A
AB	AB	B	A^2B	A	E	A^2
A^2B	A^2B	AB	B	A^2	A	E

$\to$

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	B	E	D	F	C
B	B	E	A	F	C	D
C	C	F	D	E	B	A
D	D	C	F	A	E	B
F	F	D	C	B	A	E

(12) つづき

これから先は，上の$G_6^{(1)}$と$G_6^{(2)}$で位数６の群の可能性は尽きていることを確かめる。残っている可能性は位数２の元が３つある場合であるから，これが可能かどうかを調べる。

$G_6^{(3)}=\{E,A,B,AB,C,AC\},\qquad A^2=B^2=C^2=E$

この群の積表を作ってみよう。

	E	A	B	AB	C	AC
E	E	A	B	AB	C	AC
A	A	E	AB	B	AC	C
B	B	BA	E	BAB	BC	BAC
AB	AB	ABA	A	$ABAB$	ABC	$ABAC$
C	C	CA	CB	CAB	E	CAC
AC	AC	ACA	ACB	$ACAB$	A	$ACAC$

第１行と第２行ははじめの元が現われているだけで，なんの手掛かりも掴めないので，第３行のBAにまず着目しよう。BAは$G_6^{(3)}$の元（すべて異なる）のどれかと等しいはずであるが，E,A,Bとは等しくないから，AB,C,ACのどれかと等しい可能性を調べる。まず，$BA=C$とすると，$BAC=E\ \rightarrow\ AC=B$となり，矛盾。だから$BA\neq C$。次に，$BA=AB$とすると，第３行は，$B\quad AB\quad E\quad A\quad BC\quad BAC$，となり，元$C$としては，$C=BC$か$C=BAC$の可能性しかないが，それぞれ，$B=E,\ BA=E$が導かれて，矛盾。残るのは$BA=AC$。第３行は，$B\quad AC\quad E\quad BAB\quad BC\quad A$，となる。ここで，元$C$は$C=BAB$以外では矛盾を生じることがわかるので，$BC=AB$。しかし，$BA=AC$と$BC=AB$の下では，

$(BA)^2=BABA=BBCA=CA,\quad (BA)^3=CABA=CAAC=E$

となるから，$G_6^{(3)}$は$BA=AC$という位数３の元を含んでいることになる。これは初めの仮定に反する。換言すれば，$G_6^{(2)}$の場合に戻ってしまう。したがって，位数６の群は$G_6^{(1)}$と$G_6^{(2)}$の２つのタイプに尽きることが結論できる。

♣　お疲れさま　♣

問題 (12) は解答を読むだけでも大変だったでしょう。しかし，ひとつひとつ可能性を虱つぶしにしていく所など推理小説を読むスリルと何処か通ってはいませんか？　これで，位数 2,3,4,5,6 の抽象群の積表が一網打尽にわかってしまいました。７は素数ですから，巡回群であることは確かで，　2,3,5,7 の位数の群は巡回群，４と６では巡回群の他に１つづつ別の可能性があるだけです。この結論は，今後，どのような具体的な群に出会うにしても破れることはありません。これが数学の抽象性の素晴しさです。

第４章練習問題の解答

(1)

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

yを消去

$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$

$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1$

$\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) x = \left(c_1 b_2 - c_2 b_1\right), \qquad x = \left(c_1 b_2 - c_2 b_1\right) / \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)$

xを消去

$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1$

$a_2 a_1 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2$

$\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) x = \left(a_1 c_2 - a_2 c_1\right), \qquad y = \left(a_1 c_2 - a_2 c_1\right) / \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)$

(2)　(III) によれば

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} \quad exchangecolumns \rightarrow - \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

(3)　(4.1.11) を　a_{11},　a_{21},　a_{31}　に着目して，次のようにまとめる。

$$|A_3| = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

これは，確かに第１列についての余因子展開になっている。

(4)　(I) (III) (II) (IV) (V) の順序で証明する。準備として第１列について余因子展開。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (\ )$$

(I)：　( )の右辺に１つの数λを掛けて，まとめ直せばよい。任意の行または列について余因子展開し，同様に考えればよい。

(III)：　第１列と第２列を交換した行列式を第２列について余因子展開する。

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (\quad)$$

確かに，(　) = −( ) になっている。第１列と第３列を交換した行列式を第３列について余因子展開して同じようにすれば，(III) の成立が確かめられる。

(II)：　上の問題 (2) と同様に，(III) は (II) を含む。

(IV)：　( )の右辺の第２，第３項をまとめ直すと，

$$a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right)$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(V)：　次の行列式を第１列について余因子展開すればよい。

$$\begin{vmatrix} a_{11} + d_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + d_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + d_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(5) 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

この第２項は行列式の性質 (II) からゼロ。

(6) (a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (b) 1

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = \prod_{i<j}^{3}(x_i - x_i)$$

$$= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = \prod_{i<j}^{3}(x_i - x_i)$$

これはヴァンデルモンドの行列式と呼ばれる行列式の１例。

(7) $x = 1,\quad y = 2,\quad z = 3$

(8) (a) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta - i\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\theta}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{+i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + i\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-i\theta}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{+i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) , (b) の共通点は１つの行列を１つの1 列行列 (ベクトル)に掛けた結果が，その元の1 列行列 (ベクトル) に１つのただの数 (スカラー）を掛けた形になっていることである。しかも，同じ行列について，その性質をもつ1 列行列 (ベクトル) が１つだけでなく，２つあることも共通している。この(a) , (b) は第５章で学ぶ行列の固有値問題の例である。

(9)

$$(\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{il} = \sum_j (\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{BC})_{jl} = \sum_j (\mathbf{A})_{ij}\sum_k (\mathbf{B})_{jk}(\mathbf{C})_{kl} = \sum_k\sum_j (\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{B})_{jk}(\mathbf{C})_{kl}$$

$$= \sum_k\left(\sum_j (\mathbf{A})_{ij}(\mathbf{B})_{jk}\right)(\mathbf{C})_{kl} = \sum_k (\mathbf{AB})_{ik}(\mathbf{C})_{kl} = ((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{il}$$

(10)　左辺の積を行うと

$$\begin{pmatrix} a_{11}a'_{11}+a_{12}a'_{21} & a_{11}a'_{12}+a_{12}a'_{22} \\ a_{21}a'_{11}+a_{22}a'_{21} & a_{21}a'_{12}+a_{22}a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

両辺の要素を等しいとして２組の連立方程式が得られる。

$$a_{11}a'_{11}+a_{12}a'_{21}=1 \qquad a_{11}a'_{12}+a_{12}a'_{22}=0$$

$$a_{21}a'_{11}+a_{22}a'_{21}=0 \qquad a_{21}a'_{12}+a_{22}a'_{22}=1$$

これらをクラメルの公式で解けば,

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a'_{11}=\frac{a_{22}}{|\mathbf{A}|}, \quad a'_{21}=\frac{-a_{21}}{|\mathbf{A}|}, \quad a'_{12}=\frac{-a_{12}}{|\mathbf{A}|}, \quad a'_{22}=\frac{a_{11}}{|\mathbf{A}|}$$

したがって，$\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}'$ は

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AA}'=1 \qquad \mathbf{A}'\mathbf{A}=1 \qquad \mathbf{A}'=\mathbf{A}^{-1}$$

(11)　公式 (4.3.12) から

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21} & \hat{A}_{31} \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{13} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{33} \end{pmatrix} \qquad where \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

具体的に積をとる。

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21} & \hat{A}_{31} \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{13} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} a_{11}\hat{A}_{11}+a_{12}\hat{A}_{12}+a_{13}\hat{A}_{13} & a_{11}\hat{A}_{21}+a_{12}\hat{A}_{22}+a_{13}\hat{A}_{23} & a_{11}\hat{A}_{31}+a_{12}\hat{A}_{32}+a_{13}\hat{A}_{33} \\ a_{21}\hat{A}_{11}+a_{22}\hat{A}_{12}+a_{23}\hat{A}_{13} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

上の (1,1) 要素は

$$a_{11}\hat{A}_{11}+a_{12}\hat{A}_{12}+a_{13}\hat{A}_{13}=|\mathbf{A}|$$

(1,2)　要素は

$$a_{11}(-1)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{11}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{12}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{13}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})=0$$

あとも同じようにして

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これで，この問題は解けたわけですが，この計算から$\left\{a_{ij}\right\}$と$\left\{A_{ij}\right\}$との間には面白い直交関係がありそうなので，それを探してみます。

♣ (11) を解いたついでに ♣

２つの行（列でもよい）の等しい行列式はゼロ。それを余因子展開すれば色々な直交関係が得られる。例えば,

$$0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\hat{A}_{21} + a_{12}\hat{A}_{22} + a_{13}\hat{A}_{23} = 0$$

同じ様な工夫で，一般に,

$$\sum_j a_{ij}\hat{A}_{kj} = |\mathbf{A}|\delta_{ik}, \qquad \sum_j a_{ji}\hat{A}_{jk} = |\mathbf{A}|\delta_{ik}$$

であることがわかる。実は，この関係式は (3×3) だけに限らず，(n×n) でも成り立つ。■

(12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & d+e+f & g+h+i \\ b+c & e+f & h+i \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$a=1, b=0, c=0; \quad d=-1, e=1, f=0; \quad g=0, h=-1, i=1$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に，逆行列の公式 (4.3.12) を使う。

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21} & \hat{A}_{31} \\ \hat{A}_{12} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{32} \\ \hat{A}_{13} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \hat{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \hat{A}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

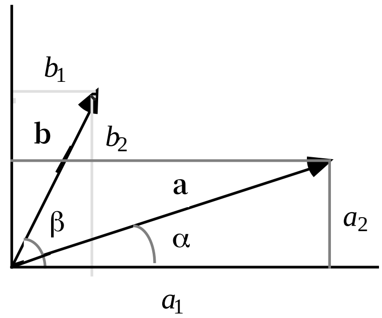
$$\hat{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \cdots\cdots\cdots$$

と進めば，上と同じ$\mathbf{A}^{-1}$が得られる。

第５章練習問題の解答

(1)　　$\beta-\alpha=\theta$ とする。

$$a_1=a\cos\alpha \qquad a_2=\sin\alpha$$
$$b_1=b\cos\beta \qquad b_2=\sin\beta$$



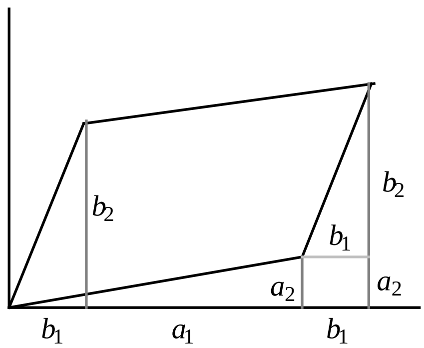
スカラー積の公式から

$$ab\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2=ab\cos\alpha\cos\beta+ab\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

これから

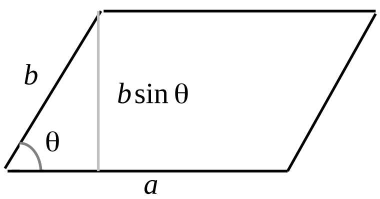
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

(2)



左図を見ながら，平行四辺形の面積を次のように計算する。

$$\tfrac{1}{2}b_1b_2+\tfrac{1}{2}a_1(b_2+a_2+b_2)$$
$$-\tfrac{1}{2}a_1a_2-\tfrac{1}{2}b_1b_2-a_2b_1$$
$$=a_1b_2-a_2b_1$$



$$area=a_1b_2-a_2b_1=ab\sin\theta=ab\sin(\beta-\alpha)$$
$$=a\cos\alpha\;\;b\sin\beta-a\sin\alpha\;\;b\cos\beta$$
$$\sin(\beta-\alpha)=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-(-\beta))$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

(3)　　**本文中にある。**

(4)　　(5.4.21)

$$\mathbf{R}(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$R_{11}=\cos\alpha \qquad R_{12}=-\sin\alpha \qquad R_{13}=0$$
$$R_{21}=\sin\alpha \qquad R_{22}=\cos\alpha \qquad R_{23}=0$$
$$R_{31}=0 \qquad R_{32}=0 \qquad R_{33}=1$$

あとは，これらの値を使って，(5.5.18) と(5.5.25) を計算すればよい。

(5) <1>

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

<2>

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2-i \\ 3 & e^{-i} & -4i \\ 5 & e^{+i} & 6 \end{pmatrix}$$

<3>

$$\mathbf{B}^\dagger = (\mathbf{B}^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -i & e^{-i} & e^{+i} \\ 2-i & -4i & 6 \end{pmatrix}$$

<4>

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{RR}^T = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) **本文中に** $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$ **があるので,**

$(\mathbf{ABC})^\dagger = (\mathbf{A}(\mathbf{BC}))^\dagger = (\mathbf{BC})^\dagger\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$

(7) **A の固有値と固有ベクトル。(5.9.11) の** $D=0$ **は**

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -8 \\ 2 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)(11-\lambda)+16 = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda-3)(\lambda-9)$

$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 9$

[1] $\lambda_1 = 3$

$-2x_1 - 8x_2 = 0 \qquad x_1 = -4x_2$

[2] $\lambda_2 = 9$

$-8x_1 - 8x_2 = 0 \qquad x_1 = -x_2$

B の固有値と固有ベクトル。(5.9.11) の $D=0$ **は,** $\cos\theta = c$ $\sin\theta = s$ **と略記して**

$$\begin{vmatrix} (c-\lambda) & -s & 0 \\ s & (c-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)\begin{vmatrix} (c-\lambda) & -s \\ s & (c-\lambda) \end{vmatrix}$$

$(c-\lambda)^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + c^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + 1 = 0$

$$\lambda = \frac{+2c \pm \sqrt{4c^2-4}}{2} = c \pm \sqrt{c^2-1} = c \pm \sqrt{-s^2} = c \pm is = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$\lambda_1 = c + is = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$\lambda_2 = c - is = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

$\lambda_3 = 1 \qquad \textit{from} \quad (1-\lambda) = 0$

[1] $\lambda_1 = c + is = e^{i\theta}$

$$(c - c - is)x_1 \quad - s x_2 \quad = 0 \quad \to \quad isx_1 + sx_2 = 0$$

$$sx_1 \quad + (c - c - is)x_2 = 0 \quad \to \quad sx_1 - isx_2 = 0$$

$$x_1 = ix_2 \quad or \quad x_2 = -ix_1 \quad or \quad x_1 : x_2 = 1 : (-i)$$

$$(1 - \lambda_1)x_3 = (c - c - is)x_3 = 0 \qquad x_3 = 0$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(5.9.13) によって規格化すれば} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

[2] $\lambda_2 = c - is = e^{-i\theta}$

この場合も上と同様にして，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(5.9.13) によって規格化すれば} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

[3] $\lambda_3 = 1$

$$(c-1)x_1 - sx_2 = 0 \quad \to \quad x_1 / x_2 = +s/(c-1)$$

$$sx_1 + (c-1)x_2 = 0 \quad \to \quad x_1 / x_2 = -s/(c-1)$$

$$x_1 / x_2 = -x_1 / x_2 \quad or \quad x_2 / x_1 = -x_2 / x_1$$

したがって， $x_1 = 0 \qquad x_2 = 0$

$(1 - \lambda_3)x_3 = (1-1)x_3 = 0$ **だから，規格化を考えて，** $x_3 = 1$ **ととればよい。**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

♣ (7) を解いたついでに ♣

行列B について，(5.9.17) の形に固有値問題をまとめてみます。

$\mathbf{BX} = \mathbf{X\Lambda}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad from \quad (4.3.12) \quad \mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次には， $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{XX}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **を確かめ，また，少し長い計算ですが**

$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{BX} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ **も確かめてみて下さい。**