7 A　　重要な定理の証明

　この付録では第7章の重要な定理の証明をします。その中心は表現行列についての大直交性定理です。証明の進め方はWigner の本（2 頁に引用）に従っていて，少し冗長ですが、現在の標準的教科書のものと異なるので，かえって面白いかも，と考えました。

===

[表現のユニタリー化の定理]

　有限群の表現は相似変換によってユニタリー表現にすることが出来るので，一般に有限群の表現の議論をする時にはそれがユニタリー行列であると考えてよい。

===

[証明]

　有限群$\boldsymbol{G}=\{G_1,G_2,\cdots\cdots\}$の表現行列$\{\mathbf{D}(G_1),\mathbf{D}(G_2),\cdots\cdots\}$がユニタリーでないとします。今
１つの行列

$$\mathbf{A}=\sum_G \mathbf{D}(G)\mathbf{D}^\dagger(G) \tag{7A.1}$$

を作ります。$\mathbf{D}^\dagger$は$\mathbf{D}$のエルミート共役(転置して＊をとった)行列です。

$$\mathbf{A}^\dagger=\sum_G\left[\mathbf{D}(G)\mathbf{D}^\dagger(G)\right]^\dagger=\sum_G\left[\mathbf{D}^\dagger(G)\right]^\dagger\mathbf{D}^\dagger(G)=\mathbf{A}$$

だから$\mathbf{A}$はエルミート行列です。5.9の定理によれば，エルミート行列$\mathbf{A}$はユニタリー行列$\mathbf{X}$で実数を対角要素とする対角行列Λに変換することが出来ます：

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}=\Lambda \tag{7A.2}$$

$\mathbf{X}^{-1}=\mathbf{X}^\dagger$に注意すると，上の式から

$$\Lambda=\sum_G \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G)\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}^\dagger(G)\mathbf{X}=\sum_G\left[\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G)\mathbf{X}\right]\left[\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G)\mathbf{X}\right]^\dagger$$

ここで

$$\mathbf{F}(G)=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G)\mathbf{X} \tag{7A.3}$$

と置くと、$\{\mathbf{F}(G)\}$は$\{\mathbf{D}(G)\}$と同値の，群$\boldsymbol{G}$の表現になっています。何故なら，$\boldsymbol{G}$の元G，G',G'' の関係が

$$GG'=G''$$

であると，それに対応して

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(G)\mathbf{F}(G')&=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G)\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G')\mathbf{X}\\&=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G)\mathbf{D}(G')\mathbf{X}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G'')\mathbf{X}=\mathbf{F}(G'')\end{aligned}$$

この$\mathbf{F}(G)$を使えば

$$\Lambda=\sum_G \mathbf{F}(G)\mathbf{F}^\dagger(G) \tag{7A.4}$$

対角行列Λ の任意の対角要素（kk）を具体的に書けば

$$[\Lambda]_{kk}=\sum_G\sum_l\left[\mathbf{F}(G)\right]_{kl}\left[\mathbf{F}^\dagger(G)\right]_{lk}=\sum_G\sum_l\left[\mathbf{F}(G)\right]_{kl}\left[\mathbf{F}(G)\right]_{kl}^*$$

だから，これは一般にゼロでない正の実数になると考えてよい，つまり，

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

で$\lambda_k > 0$ですから，次の２つの対角行列

$$\Lambda^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & & & \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sqrt{\lambda_k} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \Lambda^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & & & \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (7A.5)$$

を定義することが出来ます。$\Lambda^{1/2}$ と $\Lambda^{-1/2}$ については

$$\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2} = \Lambda, \quad \Lambda^{-1/2}\Lambda\Lambda^{-1/2} = \mathbf{E}, \quad \left(\Lambda^{1/2}\right)^{\dagger} = \Lambda^{1/2}, \quad \left(\Lambda^{-1/2}\right)^{\dagger} = \Lambda^{-1/2}$$

などの性質があることを確かめて下さい。

次に

$$\mathbf{K}(G) = \Lambda^{-1/2}\mathbf{F}(G)\Lambda^{1/2} \qquad (7A.6)$$

を定義すると$\{\mathbf{K}(G)\}$　も$\{\mathbf{D}(G)\},\{\mathbf{F}(G)\}$　と同じように群$\boldsymbol{G}$の行列表現になっていることはすぐに確かめられます。この$\mathbf{K}(G)$がエルミート行列であることを証明するためには

$$\mathbf{K}(G)\mathbf{K}^{\dagger}(G) = \mathbf{E} \qquad (\mathbf{E}\text{ は単位行列}) \qquad (7A.7)$$

であることを示せばよいわけです。

$$\mathbf{K}^{\dagger}(G) = \left[\Lambda^{-1/2}\mathbf{F}(G)\Lambda^{1/2}\right]^{\dagger} = \left(\Lambda^{1/2}\right)^{\dagger}\mathbf{F}^{\dagger}(G)\left(\Lambda^{-1/2}\right)^{\dagger} = \Lambda^{1/2}\mathbf{F}^{\dagger}(G)\Lambda^{-1/2}$$

ですから，(7A.4) を使うと

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(G)\mathbf{K}^{\dagger}(G) &= \Lambda^{-1/2}\mathbf{F}(G)\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}\mathbf{F}^{\dagger}(G)\Lambda^{-1/2} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{F}(G)\Lambda\mathbf{F}^{\dagger}(G)\Lambda^{-1/2} \\ &= \Lambda^{-1/2}\mathbf{F}(G)\sum_{G'}\mathbf{F}(G')\mathbf{F}^{\dagger}(G')\mathbf{F}^{\dagger}(G)\Lambda^{-1/2} \\ &= \Lambda^{-1/2}\sum_{G'}\mathbf{F}(G)\mathbf{F}(G')\mathbf{F}^{\dagger}(G')\mathbf{F}^{\dagger}(G)\Lambda^{-1/2} \\ &= \Lambda^{-1/2}\sum_{G'}\left[\mathbf{F}(G)\mathbf{F}(G')\right]\left[\mathbf{F}(G)\mathbf{F}(G')\right]^{\dagger}\Lambda^{-1/2} \\ &= \Lambda^{-1/2}\sum_{G'}\mathbf{F}(GG')\mathbf{F}(GG')\Lambda^{-1/2} \end{aligned}$$

ここでG'についての和は$\boldsymbol{G}$のすべての元についての和ですから

$$\sum_{G'}\mathbf{F}(GG')\mathbf{F}^{\dagger}(GG') = \sum_{G}\mathbf{F}(G)\mathbf{F}^{\dagger}(G) = \Lambda$$

したがって

$$\mathbf{K}(G)\mathbf{K}^{\dagger}(G) = \Lambda^{-1/2}\Lambda\Lambda^{-1/2} = \mathbf{E}$$

となって (7A.7) の証明が出来ました。(7A.3) から

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(G) &= \Lambda^{-1/2}\mathbf{F}(G)\Lambda^{1/2} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G)\mathbf{X}\Lambda^{1/2} \\ &= \left(\mathbf{X}\Lambda^{1/2}\right)^{-1}\mathbf{D}(G)\left(\mathbf{X}\Lambda^{1/2}\right)\end{aligned} \qquad (7A.8)$$

こうしてエルミート行列$\mathbf{K}(G)$が出発点の非エルミート行列$\mathbf{D}(G)$から１つの相似変換によって得られることが示されました。ちなみに，$\left(\mathbf{X}\Lambda^{1/2}\right)$ は一般にユニタリー行列ではありません。また，$\Lambda^{1/2}$ $\Lambda^{-1/2}$ で行列の平方根が定義されたわけではなく，(7A.5)で定義された行列を表わす便利な記号と思って下さい。

(証明終り)

次にシュールの補助定理 (Shur's lemmas) と呼ばれる２つの定理を証明します。番号の付け方が逆になっている本もあります。

==

[シュールの補助定理 (1)]

有限群$\boldsymbol{G}$ の１つの既約表現$\{\mathbf{D}(G)\} = \{\mathbf{D}(G_1), \mathbf{D}(G_2), \cdots\cdots\}$ のすべての行列と可換な行列は単位行列 $\mathbf{E}$ に１つの定数λ (複素数を含む) をかけたλ$\mathbf{E}$ の形をしている。つまり

$$\mathbf{D}(G)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}(G) \qquad G \quad \boldsymbol{G} \qquad (7A.9)$$

であるとき

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \qquad (7A.10)$$

==

[証明]

まず (7A.9) を満たす$\mathbf{A}$ があるとして，それを適当な行列$\mathbf{X}$ で対角化した対角行列を

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

とし，同じ$\mathbf{X}$ を使って新しい行列のセット$\{\mathbf{D}'(G)\}$:

$$\mathbf{D}'(G) = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}(G)\mathbf{X} \qquad G \quad \boldsymbol{G} \qquad (7A.11)$$

を定義すると$\{\mathbf{D}'(G)\}$ も$\boldsymbol{G}$ の表現になっていますが，(7A.9) , (7A.11) を使って

$$\mathbf{D}'(G)\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{D}'(G) = \mathbf{X}^{-1}\left[\mathbf{D}(G)\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{D}(G)\right]\mathbf{X}$$

そこで，もし，$\mathbf{D}(G)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}(G)$ であれば

$$\mathbf{D}'(G)\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{D}'(G) = \mathbf{0} \qquad (7A.12)$$

つまり，$\mathbf{B}$は$\mathbf{D}'(G)$と可換です。この式の両辺の(i, j) 要素を具体的に書くと

$$\sum_{k=1}^{d}\left[D'_{ik}(G)B_{kj} - B_{ik}D'_{kj}(G)\right] = 0 \qquad i, j = 1, 2, \cdots\cdots, d \qquad (7A.13)$$

d は$\mathbf{D}(G)$の次元です。ところで$\mathbf{B}$は対角行列だから

$$k \neq j \quad \text{なら} \quad B_{kj} = 0\,, \qquad k \neq i \quad \text{なら} \quad B_{ik} = 0$$

したがって，(7A.13) の和はただ１項だけが残って，

$$D'_{ij}(G)B_{jj} - B_{ii}D'_{ij}(G) = 0$$

つまり

$$D'_{ij}(G)\left(B_{jj} - B_{ii}\right) = 0 \qquad i, j = 1,2,\cdots\cdots, d \qquad (7A.14)$$

となります。そこで，もし多くの(i, j)の組について

$$B_{jj} - B_{ii} \neq 0$$

となれば，多くの$D'_{ij}(G)$がゼロになり，（7A.11）から考えて$\mathbf{D}(G)$が可約になる(簡約される）可能性が大きくなります。その可能性が最も少ない場合として，例えば，対角行列$\mathbf{B}$の対角要素のうちB_{11}だけが異なり，他はすべて等しい場合：

$$B_{11} \neq B_{22} = B_{33} = \cdots\cdots = B_{dd}$$

を考えてみると，(7A.14)から

$$D'_{1j}(G)\left(B_{jj} - B_{11}\right) = 0 \qquad j = 2,3,\cdots\cdots, d$$

$$D'_{i1}(G)\left(B_{11} - B_{ii}\right) = 0 \qquad i = 2,3,\cdots\cdots, d$$

したがって，

$$D'_{1j}(G) = 0 \qquad j = 2,3,\cdots\cdots, d$$

$$D'_{i1}(G) = 0 \qquad i = 2,3,\cdots\cdots, d$$

が結論できます。つまり表現行列$\mathbf{D}'(G)$の$D'_{11}(G)$を除いた第１行と第１列の要素のすべてがゼロになり，これはもとの表現行列$\mathbf{D}(G)$が(7A.11）の変換で簡約されて，１つの１次元表現が得られたことを意味します。しかし，これは$\mathbf{D}(G)$は既約として出発したことと矛盾しますから，結局，対角行列$\mathbf{B}$の対角要素はすべて等しくなければならないことが結論できます：

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = \cdots\cdots = B_{dd} = \lambda$$

$$\mathbf{B} = \lambda\mathbf{E}$$

したがって

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{X}\mathbf{E}\mathbf{X}^{-1} = \lambda\mathbf{E}$$

これで(7A.10）が証明できました。$\mathbf{B}$の対角要素のB_{11}ではなくB_{kk}が１つだけ他と異なるとしても同じことで，表現の基底の順序をかえればB_{kk}をB_{11}の位置に持ってこれます。(証明終り）

==

[シュールの補助定理(2)]

有限群$\boldsymbol{G}$の２つの異なる既約表現α, βの表現行列$\left\{\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right\}$(次元$d_\alpha$)，$\left\{\mathbf{D}^{(\beta)}(G)\right\}$(次元$d_\beta$）について，もし１つの(一般には矩型)行列 $\mathbf{A}$ が存在し

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(\beta)}(G) \qquad G \quad \boldsymbol{G} \qquad (7A.15)$$

であるとすると

（a）もし$d_\alpha = d_\beta$ならば，$\det(\mathbf{A}) \neq 0$で，２つの表現α, βは等価であるか，さもなければ，$\mathbf{A} = \mathbf{0}$

（b）もし$d_\alpha \neq d_\beta$ならば，$\mathbf{A} = \mathbf{0}$

==

［ 証明 ］

$d_\alpha \le d_\beta$ としても一般性を失いません（詳細は後で）。(7A.15) のエルミート共役をとると

$$\mathbf{A}^\dagger\left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^\dagger = \left[\mathbf{D}^{(\beta)}(G)\right]^\dagger \mathbf{A}^\dagger$$

表現行列 $\mathbf{D}^{(\alpha)}(G), \mathbf{D}^{(\beta)}(G)$ はユニタリー化の定理からユニタリー行列と考えてよろしい。まず，一般に $\left[\mathbf{D}(G)\right]^{-1} = \mathbf{D}\left(G^{-1}\right)$ ですから，ユニタリー行列ならば $\left[\mathbf{D}(G)\right]^\dagger = \mathbf{D}\left(G^{-1}\right)$，したがって

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G^{-1}\right) = \mathbf{D}^{(\beta)}\left(G^{-1}\right)\mathbf{A}^\dagger$$

左から両辺に $\mathbf{A}$ を掛けると

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G^{-1}\right) = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(\beta)}\left(G^{-1}\right)\mathbf{A}^\dagger \qquad (\ 7A.16\ )$$

ところで (7A.15) は **G** のすべての要素についての式だから

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G^{-1}\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(\beta)}\left(G^{-1}\right) \qquad G \quad \boldsymbol{G}$$

としても同じことなので，この式に右から $\mathbf{A}^\dagger$ を掛けると

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G^{-1}\right)\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(\beta)}\left(G^{-1}\right)\mathbf{A}^\dagger$$

この式の右辺は(7A.16) の右辺と同じだから

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G^{-1}\right) = \mathbf{D}^{(\beta)}\left(G^{-1}\right)\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$$

したがって，シュールの補助定理(1) から

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \lambda\mathbf{E}$$

これで $\mathbf{A}$ の性質が大分はっきりしてきました。そこで

(a) もし，$d_\alpha = d_\beta$ ならば，$\mathbf{A}$ も $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ も正方行列でであり，$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ の行列式を計算すると，(4,3.10) から

$$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\right) = \det(\lambda\mathbf{E}) = \lambda^{d_\alpha}$$

ここで

$$\det\left(\mathbf{A}^\dagger\right) = \left[\det\left(\mathbf{A}^T\right)\right]^* = \left[\det(\mathbf{A})\right]^*$$

に注意すると, (4.3.9) を使って

$$\det\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\right) = \det(\mathbf{A})\det\left(\mathbf{A}^\dagger\right) = \det(\mathbf{A})\left[\det\left(\mathbf{A}^T\right)\right]^*$$

$$= \det(\mathbf{A})\left[\det(\mathbf{A})\right]^* = \left|\det(\mathbf{A})\right|^2 = \lambda^{d_\alpha}$$

そこで，$\lambda \ne 0$ の場合と，$\lambda = 0$ の場合を分けて考えます。

$\lambda \ne 0$ ならば，$\det(\mathbf{A}) \ne 0$，したがって $\mathbf{A}$ は逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を持ち，(7A.15) から

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\mathbf{A} = \mathbf{D}^{(\beta)}(G)$$

つまり，表現 α, β は同値の表現であることが結論できます。

次に，$\lambda = 0$ の場合は $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{0}$，これは

$$\sum_{k=1}^{d_\alpha}[\mathbf{A}]_{ik}\left[\mathbf{A}^\dagger\right]_{kj} = 0$$

つまり

$$\sum_{k=1}^{d_\alpha} A_{ik}A_{jk}^* = 0 \qquad i = 1,2,\cdots\cdots,d_\alpha;\ j = 1,2,\cdots\cdots,d_\alpha$$

を意味し，$i = j$ と置くと

$$\sum_{k=1}^{d_\alpha} \left| A_{ik} \right|^2 = 0 \qquad i = 1,2,\cdots\cdots,d_\alpha$$

したがって，すべての$A_{ik} = 0$，つまり

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

(b) もし$d_\alpha < d_\beta$ ならば，**A** は横長の矩型行列ですが，この**A** に$\left(d_\beta - d_\alpha\right)$ 行のゼロの並びを付け加えて，正方行列**B**を作ります。具体的に**B**の形をかけば，すぐにわかりますが

$$\mathbf{BB}^\dagger = \mathbf{AA}^\dagger \qquad \text{そして} \qquad \det\left(\mathbf{BB}^\dagger\right) = \left|\det(\mathbf{B})\right|^2 = 0$$

したがって，この場合も，$\det\left(\mathbf{AA}^\dagger\right) = 0$であり，一方，前と同じように

$$\det\left(\mathbf{AA}^\dagger\right) = \det(\lambda\mathbf{E}) = \lambda^{d_\alpha}$$

ですから，$\lambda = 0$が結論され，したがって

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

以上で証明はほぼ終ったのですが，(b) で $d_\alpha < d_\beta$ と仮定したので，この点を調べます。

[$\underline{d_\alpha > d_\beta}$ の場合について]

$\boldsymbol{G} = \{G_1, G_2, \cdots\cdots\}$ の既約表現$\{\mathbf{D}(G_1), \mathbf{D}(G_2), \cdots\cdots\}$ があるとして，各行列を転置した行列の集合が，また，$\boldsymbol{G}$ の表現になるかどうかを考えます。$G_iG_j = G_l$ とすると$\mathbf{D}(G)$については

$$\mathbf{D}(G_i)\mathbf{D}(G_j) = \mathbf{D}(G_iG_j) = \mathbf{D}(G_l)$$

ですが，転置行列については

$$\left[\mathbf{D}(G_i)\right]^T \left[\mathbf{D}(G_j)\right]^T = \left[\mathbf{D}(G_j)\mathbf{D}(G_i)\right]^T = \left[\mathbf{D}(G_jG_i)\right]^T$$

となるので，逆表現的になってしまいます。しかし，$\left[\mathbf{D}(G_i^{-1})\right]^T$ をとってみると

$$\left[\mathbf{D}(G_i^{-1})\right]^T \left[\mathbf{D}(G_j^{-1})\right]^T = \left[\mathbf{D}(G_j^{-1})\mathbf{D}(G_i^{-1})\right]^T = \left[\mathbf{D}(G_j^{-1}G_i^{-1})\right]^T$$

$$= \left[\mathbf{D}\left((G_iG_j)^{-1}\right)\right]^T$$

とうまく行くので，

$$\left\{\left[\mathbf{D}(G_i^{-1})\right]^T\right\} \qquad G_i \quad \boldsymbol{G}$$

が$\boldsymbol{G}$の表現になっていることがわかります。この表現が$\boldsymbol{G}$ の既約表現になっていることは次のように確かめられます。指標は転置しても変らないので

$$\chi\left(\left[\mathbf{D}(G^{-1})\right]^T\right) = \chi\left(\mathbf{D}(G^{-1})\right) \qquad G \quad \boldsymbol{G}$$

そして，$\boldsymbol{G}$ に属するすべてのG についての和をとれば

$$\sum_G \left|\chi\left(\mathbf{D}(G^{-1})\right)\right|^2 = \sum_G \left|\chi\left(\mathbf{D}(G)\right)\right|^2$$

したがって，$\{\mathbf{D}(G)\}$ が既約表現ならば，(7.1.16) から $\left\{\left[\mathbf{D}(G^{-1})\right]^T\right\}$ も既約表現です。ですから，もし (7A.15) で$d_\alpha > d_\beta$ であれば，両辺を転置して

$$\left[\mathbf{D}^{(\beta)}(G)\right]^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^T \qquad G \quad \boldsymbol{G}$$

として，行列　$\mathbf{A}^T, \left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^T, \left[\mathbf{D}^{(\beta)}(G)\right]^T$ について，前と同じ議論をすればよいわけで，結局，$\mathbf{A}^T = \mathbf{0}$，したがって，$\mathbf{A} = \mathbf{0}$ などの結論が得られます。(証明終り)

◎　[表現行列についての大直交性定理の証明]

これから本書の第 7 章の(7.1.4a) と (7.1.4b) の証明に取りかかります。長くても一歩一歩のステップはむつかしくありません。まず次の行列 $\mathbf{A}$ を定義します：

$$\mathbf{A} = \sum_S \mathbf{D}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\alpha)}(S)$$

$\mathbf{D}^{(\alpha)}(S)$ は群 $\boldsymbol{G}$ の既約表現 α　の表現行列で，S についての和は $\boldsymbol{G}$ の g 個の元すべてについてとります。$\mathbf{D}^{(\alpha)}$ の次元を d_α とすると，行列 $\mathbf{X}$ は $d_\alpha \times d_\alpha$ の正方行列で，その内容は任意であるとしておきます。この任意性はあとで活用されます。以下の証明の方針は $\mathbf{A}$ が $\boldsymbol{G}$ の任意の元 G について

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(\alpha)}(G) \qquad G \quad \boldsymbol{G}$$

であることを確かめて，シュールの補助定理を使うことにあります。ただ，議論を円滑に進める技術的な便宜から，上の式の代りに，それと同じ内容の表式

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right) \qquad T \quad \boldsymbol{G} \tag{7A.18}$$

が成立することを確かめることにします。$\boldsymbol{G}$ のすべての元の逆元をとっているので，このように書いても同じことです。

(7A.17) の左から $\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)$ を掛けると

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)\mathbf{A} = \sum_S \mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\alpha)}(S) = \sum_S \mathbf{D}^{(\alpha)}\left((ST)^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\alpha)}(S)$$

右から $\mathbf{D}^{(\alpha)}(T)\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)$ を掛けますが

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}(T)\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right) = \mathbf{D}^{(\alpha)}\left(TT^{-1}\right) = \mathbf{D}^{(\alpha)}(E) = \mathbf{E}$$

ですから，右辺の内容を変えているわけではありません。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)\mathbf{A} &= \sum_S \mathbf{D}^{(\alpha)}\left((ST)^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\alpha)}(S)\mathbf{D}^{(\alpha)}(T)\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right) \\ &= \sum_S \mathbf{D}^{(\alpha)}\left((ST)^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\alpha)}(ST)\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)\end{aligned}$$

ところで，S についての和は $\boldsymbol{G}$ の元のすべてについて走るのですから，T がどの元であろうと

$$\sum_S \mathbf{D}^{(\alpha)}\left((ST)^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\alpha)}(ST) = \sum_R \mathbf{D}^{(\alpha)}\left(R^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\alpha)}(R) = \mathbf{A}$$

となります。これで，(7A.18) が確かめられました。したがって補助定理 (1) によれば

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E} \qquad \text{つまり} \qquad A_{jl} = \lambda\delta_{jl} \tag{7A.19}$$

の形をしているはずです。ところで （ 7A.17 ）の $\mathbf{A}$ は好きなようにとれる $\mathbf{X}$ を含んでいます。この $\mathbf{X}$ を次のようにとると，λ が定まり，(7.1.4a) が出てきます！(7A.17) を成分で書けば

$$A_{jl} = \sum_S \sum_p \sum_q D_{jp}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)X_{pq}D_{ql}^{(\alpha)}(S)$$

ここで

$$X_{pq} = \delta_{pi}\delta_{qk}$$

つまり，$p = i, q = k$ の時に限って１の値をとり，他の行列要素はすべてゼロであるようにとります。すると，(7A.19) から

$$A_{jl} = \sum_S D_{ji}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)D_{kl}^{(\alpha)}(S) = \lambda\delta_{jl} \qquad j = 1,2,\cdots\cdots,d_\alpha;\ l = 1,2,\cdots\cdots,d_\alpha$$

ここで　$j = l$ とすると

$$\lambda = \sum_S D_{ji}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)D_{kj}^{(\alpha)}(S) = \sum_S D_{kj}^{(\alpha)}(S)D_{ji}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right) \qquad j = 1,2,\cdots\cdots,d_\alpha$$

このd_α 個の式を縦に並べて加え併せる，つまり，j について両辺の和をとると

$$\lambda\sum_{j=1}^{d_\alpha} 1 = \sum_S\sum_{j=1}^{d_\alpha} D_{kj}^{(\alpha)}(S)D_{ji}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)$$

$$\lambda\ d_\alpha = \sum_S D_{ki}^{(\alpha)}\left(SS^{-1}\right) = \sum_S D_{ki}^{(\alpha)}(E) = \sum_S \delta_{ki} = g\ \delta_{ki}$$

したがって

$$\lambda = \frac{g}{d_\alpha}\delta_{ki}$$

これでλ が求められたので，上のA_{jl} の式に戻って

$$\sum_S D_{ji}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)D_{kl}^{(\alpha)}(S) = \frac{g}{d_\alpha}\delta_{ik}\delta_{jl} \qquad (7A.20)$$

ところで，前にも使いましたが，一般に

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G^{-1}\right) = \left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^{-1}$$

であり，さらに，$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)$ はユニタリー行列ですから

$$\left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^{-1} = \left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^{\dagger}$$

したがって

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G^{-1}\right) = \left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^{\dagger}$$

これを行列要素で書けば

$$D_{ji}^{(\alpha)}\left(G^{-1}\right) = \left[D_{ij}^{(\alpha)}(G)\right]^{*}$$

(7A.20) に入れて，$S \to G$ と書き換えれば

$$\sum_G \left[D_{ij}^{(\alpha)}(G)\right]^{*} D_{kl}^{(\alpha)}(G) = \frac{g}{d_\alpha}\delta_{ik}\delta_{jl}$$

となり，(7.1.4a) が得られました。

次に (7.1.4b) の証明に進みます。今度は(7A.17) の代りに

$$\mathbf{A} = \sum_S \mathbf{D}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\beta)}(S) \qquad (7A.21)$$

ととります。$\mathbf{X}$ は$d_\alpha \times d_\beta$ の任意の矩形行列です。(7A.18) に対応して

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(\beta)}\left(T^{-1}\right) \qquad T \quad \mathbf{G} \qquad (7A.22)$$

の関係を確立することを目指します。

(7A.21) の左から$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)$ を，右から$\mathbf{D}^{(\beta)}(T)\mathbf{D}^{(\beta)}\left(T^{-1}\right) = \mathbf{E}$ を掛けて，(7A.18) の場合と同じように進みます：

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)\mathbf{A} = \mathbf{D}^{(\alpha)}\left(T^{-1}\right)\mathbf{A}\mathbf{D}^{(\beta)}(T)\mathbf{D}^{(\beta)}\left(T^{-1}\right)$$
$$= \sum_S \mathbf{D}^{(\alpha)}\left((ST)^{-1}\right)\mathbf{X}\mathbf{D}^{(\beta)}(ST)\mathbf{D}^{(\beta)}\left(T^{-1}\right)$$
$$= \mathbf{A}\mathbf{D}^{(\beta)}\left(T^{-1}\right)$$

ですから，(7A.22) が確かめられました。シュールの補助定理 (2) によれば，表現α,β が同値でない表現であるならば

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

です。(7A.21) を行列要素について書いた式

$$A_{jl} = \sum_S \sum_p \sum_q D_{jp}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)X_{pq}D_{ql}^{(\beta)}(S) = 0$$

で，前と同様に$X_{pq} = \delta_{pi}\delta_{qk}$ ととれば

$$\sum_S D_{ji}^{(\alpha)}\left(S^{-1}\right)D_{kl}^{(\beta)}(S) = 0$$

$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)$ のユニタリー性を使い，S を G に書き換えれば

$$\sum_G \left[D_{ij}^{(\alpha)}(G)\right]^* D_{kl}^{(\beta)}(G) = 0$$

これで (7.1.4b) が証明できました。(証明終り)

◎ [類について]

表現行列の大直交定理の証明はすみましたが，第7章には指標についての直交定理やその他の重要な関係式があり，それらを証明し確認する仕事が残っています。そのためには第2章で導入された「類」の数学的性質の理解を広める必要があります。まずは点群$\boldsymbol{C}_{3v}$

$$\boldsymbol{C}_{3v} = \left\{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\right\}$$

を具体例として使います。$\boldsymbol{C}_{3v}$ は(2.6.5) のように 3 つの類 (class) に分類されます：

$$\boldsymbol{C}_1 \quad : \quad E \qquad\qquad g_1 = 1$$
$$\boldsymbol{C}_2 \quad : \quad C_3, C_3^2 \qquad\qquad g_2 = 2$$
$$\boldsymbol{C}_3 \quad : \quad \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v'' \qquad\qquad g_3 = 3$$

g_i 　は類に属する元の数。第2 章の部分群について使ったのと同じ意味合いの＋記号を使って上を数学的に表わせば

$$\boldsymbol{C}_1 = E$$
$$\boldsymbol{C}_2 = C_3 + C_3^2$$
$$\boldsymbol{C}_3 = \sigma_v + \sigma_v' + \sigma_v''$$

と書けます。和のなかに元が現われる順序はどうでもよろしい。類の定義から，$\boldsymbol{C}_{3v}$ の任意の元 G について

$$G^{-1}\boldsymbol{C}_i G = \boldsymbol{C}_i \qquad (7A.23)$$

が成り立ちます。例えば

$$\sigma_v^{-1}\boldsymbol{C}_2\sigma_v = \sigma_v^{-1}\left(C_3 + C_3^2\right)\sigma_v = C_3^2 + C_3 = \boldsymbol{C}_2$$

(7A.23) が一般に成立する関係であることは類の定義から明らかですが，この関係を

$$\boldsymbol{C}_i G = G\boldsymbol{C}_i \qquad (7A.23')$$

と書いて，$\boldsymbol{C}_i$ は群$\boldsymbol{G}$の任意の元Gと可換である，と言い表わすことが出来ます。

次に同じ記法の下で２つの類の積を定義します。$\boldsymbol{C}_{3v}$の例では

$$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2 = E\left(C_3 + C_3^2\right) = C_3 + C_3^2 = \boldsymbol{C}_2$$

$$\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{C}_2 = \left(C_3 + C_3^2\right)\left(C_3 + C_3^2\right) = C_3^2 + C_3^3 + C_3^3 + C_3^4 = 2E + C_3^2 + C_3$$

$$= 2\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2$$

他の組合せも同じように計算すると次の表が得られます。

<u>群$\boldsymbol{C}_{3v}$の類の積表</u>

	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_2$	$\boldsymbol{C}_3$
$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_1$	$\boldsymbol{C}_2$	$\boldsymbol{C}_3$
$\boldsymbol{C}_2$	$\boldsymbol{C}_2$	$2\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2$	$2\boldsymbol{C}_3$
$\boldsymbol{C}_3$	$\boldsymbol{C}_3$	$2\boldsymbol{C}_3$	$3\boldsymbol{C}_1 + 3\boldsymbol{C}_3$

この表で見ると

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j = \boldsymbol{C}_j\boldsymbol{C}_i \qquad (7A.24)$$

つまり，類の間の積は可換ですが，この性質が一般に成立することは（ 7A.23' ）のGが$\boldsymbol{C}_j$に属する元だと考えると直ぐにわかります。

もう１つ注目したい性質は，２つの類の積が

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij,\,p}\boldsymbol{C}_p \qquad (7A.25)$$

の形になって，右辺は類の１次結合として表わされている，つまり，１つの類に属する元が異なる数係数を持ってばらばらに立ち現われることはないということです。これを一般的に確かめるのは少し手間が掛ります。まず記号を整備します。

群$\boldsymbol{G} = \left\{G_1 = E, G_2, G_3, \cdots\cdots, G_g\right\}$ は n_c個の類

$$\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{C}_{n_c}$$

に分類され，その１つ$\boldsymbol{C}_p$はg_pの元を含むものとします：

$$\boldsymbol{C}_p = G_{p,1} + G_{p,2} + \cdots + G_{p,l} + \cdots + G_{p,m} + \cdots + G_{p,g_p}$$

$\boldsymbol{G}$ の任意の元Gについて

$$G^{-1}\boldsymbol{C}_p G = G^{-1}G_{p,1}G + G^{-1}G_{p,2}G + \cdots\cdots$$

を作ると，各項はすべて異なる元を与えます。それは，もし

$$G^{-1}G_{p,l}G = G^{-1}G_{p,m}G$$

ならば，$G_{p,l} = G_{p,m}$ であったことを意味するからです。したがって上式の右辺には$\boldsymbol{C}_p$に属するすべての元が１回づつ現われます。このことを

$$G^{-1}\boldsymbol{C}_p G = \boldsymbol{C}_p$$

と書けば，これは(7A.23) が一般的に成り立つことを再確認したことになります。

$\boldsymbol{G}$の（ Eではない）ある元Sについて$G_{p,l}$ と$G_{p,m}$ の間に

$$S^{-1}G_{p,l}S = G_{p.m} \qquad (7A.26)$$

が成り立つとします。C_p の任意の２つの元について，この関係が成り立つようなSが必ず選べるはずです。類の定義を思い出して下さい。さて，積$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j$ が

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j = \cdots\cdots + a_l G_{p,l} + \cdots\cdots + a_m G_{p,m} + \cdots\cdots \qquad (7A.27)$$

の形で$\boldsymbol{C}_p$ に属する任意の２つの元 $G_{p,l}, G_{p,m}$ を含むとすると，必ず $a_l = a_m$ になることが示されれば，積$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j$ の中に類$\boldsymbol{C}_p$ の元は共通の係数を持って含まれること，つまり，(7A.25) の形で含まれることが確認されたことになります。今からそれを示します。

$G_{p,l}$ と$G_{p,m}$ を (7A.26) のように結ぶ元Sを選び，(7A.27) の両辺の共役をとります。左辺は

$$S^{-1}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j S = S^{-1}\boldsymbol{C}_i S S^{-1}\boldsymbol{C}_j S = \boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j \qquad (*)$$

右辺は

$$S^{-1}[r.h.s.]S = \cdots\cdots + a_l S^{-1}G_{p,l}S + \cdots\cdots + a_m S^{-1}G_{p,m}S + \cdots\cdots \qquad (**)$$

ここで$S^{-1}G_{p,m}S$ は，類$\boldsymbol{C}_p$ には属しますが$G_{p,m}$ とは異なる元になります。(*) と (**) は等しい筈ですから

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{C}_j = \cdots\cdots + a_l G_{p.m} + \cdots\cdots$$

この式をもとの (7A.27) とくらべると

$$a_l = a_m$$

と結論せざるを得ません。これで (7A.25) が確かめられました。なお，(7A.24) の性質から

$$c_{ij,p} = c_{ji,p}$$

であり，正整数かゼロの値をとります。

この係数のうち，$\boldsymbol{C}_1 = E$ と約束すると，その係数は重要な性質を持っています。それを見つける話は少し長くなりますが，あとで大きな利用価値があるので，しばらく辛抱して下さい。

群の定義から

$$\boldsymbol{G} = \left\{G_1 = E,\ G_2, \cdots\cdots, G_g\right\}$$

は各元の逆元を使って

$$\boldsymbol{G} = \left\{G_1^{-1} = E,\ G_2^{-1}, \cdots\cdots, G_g^{-1}\right\}$$

と書いてもよろしい。元の並び方が変わるだけで集合としては同じです。例えば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C_{3v}} &= \left\{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\right\}\\ &= \left\{E^{-1}, [C_3]^{-1}, [C_3^2]^{-1}, [\sigma_v]^{-1}, [\sigma_v']^{-1}, [\sigma_v'']^{-1}\right\}\\ &= \left\{E, C_3^2, C_3, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\right\}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{C_{3v}}$ の類の構造は，前出のように

$$\boldsymbol{C}_1 = E$$

$$\boldsymbol{C}_2 = C_3 + C_3^2$$

$$\boldsymbol{C}_3 = \sigma_v + \sigma_v' + \sigma_v''$$

で与えられますが，各類の元の逆元の集合

$$C_{1'} = E^{-1}$$

$$C_{2'} = [C_3]^{-1} + [C_3^2]^{-1}$$

$$C_{3'} = [\sigma_v]^{-1} + [\sigma'_v]^{-1} + [\sigma''_v]^{-1}$$

は類になっているでしょうか？実は，類になることを見込んだ記号が使ってありますが，$\boldsymbol{C_{3v}}$ の場合には，たしかに

$$C_{1'} = C_1 \qquad C_{2'} = C_2 \qquad C_{3'} = C_3$$

という簡単な結果になります。しかし，例えば，巡回群$\boldsymbol{C_3} = \left\{E, C_3, C_3^2\right\}$ の類の構造は

$$C_1 = E \qquad C_2 = C_3 \qquad C_3 = C_3^2$$

ですから

$$C_{1'} = E^{-1} = E = C_1$$

$$C_{2'} = [C_3]^{-1} = C_3^2 = C_3$$

$$C_{3'} = [C_3^2]^{-1} = C_3 = C_2$$

という結果になり，必ずしも $C_{i'} = C_i$ とはならないことがわかります。次は一般論。ある群$\boldsymbol{G}$ の１つの類

$$C_p = G_{p,1} + \cdots\cdots + G_{p,l} + \cdots\cdots + G_{p,m} + \cdots\cdots + G_{p,g_p}$$

の逆元の集合

$$C_{p'} = G_{p,1}^{-1} + \cdots\cdots + G_{p,l}^{-1} + \cdots\cdots + G_{p,m}^{-1} + \cdots\cdots + G_{p,g_p}^{-1}$$

が$\boldsymbol{G}$の類になっていることを確かめます。前述にように，C_p の２つの元 $G_{p,l}, G_{p,m}$ について，群$\boldsymbol{G}$の１つの元Sを選んで

$$S^{-1}G_{p,l}S = G_{p,m}$$

とできる筈ですから，この両辺の逆をとって

$$\left(S^{-1}G_{p,l}S\right)^{-1} = SG_{p,l}^{-1}S^{-1} = G_{p,m}^{-1}$$

この関係は$G_{p,l}^{-1}$ と$G_{p,m}^{-1}$ が互いに共役であること，つまり，同じ類に属していることを示しています。したがって，C_pが１つの類であれば，その元の逆元の集合$C_{p'}$も１つの類をなしていることが結論できます。勿論，$\boldsymbol{C_3}$ の例でわかるように，必ずしも$C_p = C_{p'}$ とは限りません。

（7A.25）に戻って

$$C_iC_j = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij,p}C_p = c_{ij,1}C_1 + c_{ij,2}C_2 + \cdots\cdots$$

$$C_i = G_{i,1} + G_{i,2} + \cdots\cdots + G_{i,g_i}$$

$$C_{i'} = G_{i,1}^{-1} + G_{i,2}^{-1} + \cdots\cdots + G_{i,g_i}^{-1}$$

であるとすると，積 C_iC_j のC_iの中の$G_{i,s}$ について考えると，上のC_iC_jの展開式が$C_1 = E$ を含むためには，C_j は$G_{i,s}^{-1}$を含んでいなければなりません。しかし，$G_{i,s}^{-1}$を含む類は必然的にC_iの

他の元の逆元も含むことになりますから，C_jは，実は，$C_{i'}$でなければなりません。そして，$C_j = C_{i'}$

，つまり，積 $C_iC_{i'}$ の場合には，$C_1 = E$ が現われる度数はg_i だけありますから

$$c_{ij,1} = \begin{cases} g_i & \left(C_j = C_{i'}\right) \\ 0 & \left(C_j \neq C_{i'}\right) \end{cases} \qquad (\,7A.29\,)$$

となります。前出の$\boldsymbol{C_{3v}}$の類の積表でも確かにそうなっています。この一般的結論はやがて大いに役に立ちます。

◎ [正則表現 (regular representation)]

第2章で，１つの群の積表が与えられれば，その群の数学的性質が規定されることを学びました。数学者はこの積表を以下のように改作して，そこから面白い表現行列を読み取ってきて，正則表現と名付け，それを巧みに利用して，(7.1.5) などの重要な結論を引き出して来ます。

$$\boldsymbol{G} = \left\{G_1 = E, G_2, G_3, \cdots\cdots, G_g\right\}$$

という一般の有限群の正則表現を作るための積表は$\left\{G_1^{-1} = E, G_2^{-1}, G_3^{-1}, \cdots\cdots, G_g^{-1}\right\}$ を左端のタテの並びにとって $G_i^{-1}G_j$ の形の積を並べたものです：

$$\begin{array}{cccccc}
 & E & G_2 & G_3 & \cdots\ \cdots & G_g \\
E & E & G_2 & G_3 & & G_g \\
G_2^{-1} & G_2^{-1} & E & G_2^{-1}G_3 & & G_2^{-1}G_g \\
G_3^{-1} & G_3^{-1} & G_3^{-1}G_2 & E & & G_3^{-1}G_g \\
\vdots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & \vdots \\
G_g^{-1} & G_g^{-1} & G_g^{-1}G_2 & G_g^{-1}G_3 & \cdots\ \cdots & E
\end{array}$$

$G_i^{-1}G_i = E$ だから，対角線上にはE が並びます。

$$\boldsymbol{C_{3v}} = \left\{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\right\}$$

については

$$\begin{array}{ccccccc}
 & E & C_3 & C_3^2 & \sigma_v & \sigma_v' & \sigma_v'' \\
E & E & C_3 & C_3^2 & \sigma_v & \sigma_v' & \sigma_v'' \\
C_3^2 & C_3^2 & E & C_3 & \sigma_v'' & \sigma_v & \sigma_v' \\
C_3 & C_3 & C_3^2 & E & \sigma_v' & \sigma_v'' & \sigma_v \\
\sigma_v & \sigma_v & \sigma_v'' & \sigma_v' & E & C_3^2 & C_3 \\
\sigma_v' & \sigma_v' & \sigma_v & \sigma_v'' & C_3 & E & C_3^2 \\
\sigma_v'' & \sigma_v'' & \sigma_v' & \sigma_v & C_3^2 & C_3 & E
\end{array}$$

となります。

正則表現行列はこの積表から簡単なルールで作れます。行列の次元は群のそれと同じgです。$G_1 = E$ の表現行列は積表でEが現われている所に１を置き，他の要素はすべてゼロにして作ります。$\boldsymbol{C_{3v}}$ の例では

$$\mathbf{D}^{reg}(E)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

です。$\boldsymbol{C_{3v}}$ のC_3についても，積表でC_3が現われている所には１，他はゼロを置きます。σ_v についても同様です：

$$\mathbf{D}^{reg}(C_3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{D}^{reg}(\sigma_v)=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

一般的に$\boldsymbol{G}$の１つの元G_aの正則表現行列の行列要素の定義は

$$D_{ik}^{reg}(G_a)=\begin{cases}1 & : \ G_i^{-1}G_k=G_a\\ 0 & : \ G_i^{-1}G_k\neq G_a\end{cases}\tag{7A.30}$$

つまり，１つの行i について，ただ１つのk の所だけで行列要素の値を１に，他はゼロとするのです。１つのG_i^{-1}で，k を$(1,2,\cdots\cdots,g)$ と走らせると，必ず，あるk の値で$G_i^{-1}G_k=G_a$となり，その他は$\neq G_a$となります。あとの計算が見やすいように，$\boldsymbol{G}$のもう１つの元G_bの正則表現行列$\mathbf{D}^{reg}(G_b)$ の(kj)要素も書いておきます。

$$D_{kj}^{reg}(G_b)=\begin{cases}1 & : \ G_k^{-1}G_j=G_b\\ 0 & : \ G_k^{-1}G_j\neq G_b\end{cases}\tag{7A.31}$$

このように定義された行列が群$\boldsymbol{G}$の表現行列になっていることを確かめるには

$$\mathbf{D}^{reg}(G_a)\mathbf{D}^{reg}(G_b)=\mathbf{D}^{reg}(G_aG_b)\tag{7A.32}$$

であることを示せばよろしい。右辺の(ij)要素は

$$D_{ij}^{reg}(G_aG_b)=\begin{cases}1 & : \ G_i^{-1}G_j=G_aG_b\\ 0 & : \ G_i^{-1}G_j\neq G_aG_b\end{cases}\tag{7A.33}$$

で，i が与えられると，$D_{ij}^{reg}(G_aG_b)=1$となるj の値が１つあることを意味しています。左辺の(ij)要素は

$$\sum_{k=1}^{g}D_{ik}^{reg}(G_a)D_{kj}^{reg}(G_b)\tag{7A.34}$$

ですが，i を与えると，k のある１つの値 k' についてだけ

$$D_{ik'}^{reg}(G_a)=1 \qquad G_i^{-1}G_{k'}=G_a$$

であり，そのk' については，j のある１つの値 j' についてだけ

$$D^{reg}_{k'j'}(G_b) = 1 \qquad G_{k'}^{-1} G_{j'} = G_b$$

となり，その他では (7A.32) の左辺はゼロになります。ゼロでない場合には

$$G_i^{-1} G_{k'} G_{k'}^{-1} G_{j'} = G_i^{-1} G_{j'} = G_a G_b$$

となりますが，これは，i を与えた時に，j の１つの値 j' で $G_i^{-1} G_j = G_a G_b$ が成立し，そこでは (7A.32) の左辺の値が１になることが示されたわけですから，結局, (7A.32) の等号が成り立つこと，つまり，$\mathbf{D}^{reg}(G)$ が群$\boldsymbol{G}$の表現行列になっていることが証明されたわけです。

１つの有限群$\boldsymbol{G}$ (位数 g) が与えられると，上に説明した処方で，次元gの正則表現を作ることが出来ますが，$\boldsymbol{C_{3v}}$ の例からも明らかなように，一般には可約な表現です。そこで，指標の直交性 (7.1.11), (7.1.12) を使って，正則表現が含む既約表現のことを調べてみます。

$\boldsymbol{G}$ の異値既約表現の数をn_rとし，$\boldsymbol{G}$ の可約表現の指標$\chi(G)$が

$$\chi(G) = \sum_{\alpha=1}^{n_r} a_\alpha \chi^{(\alpha)}(G)$$

のように簡約されるとすると，

$$a_\alpha = \frac{1}{g} \sum_G \left[\chi^{(\alpha)}(G)\right]^* \chi(G)$$

$\chi(G)$が正則表現の指標である場合には，その定義から

$$\chi^{reg}(E) = g \qquad \text{その他の}G\text{については} \qquad \chi^{reg}(G) = 0$$

ですから，上の和はただ１項だけが生き残り，d_α を既約表現 $\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)$ の次元とすると

$$\chi^{(\alpha)}(E) = d_\alpha$$

なので，正則表現については

$$a_\alpha = \frac{1}{g}\left[\chi^{(\alpha)}(E)\right]^* \chi^{reg}(E) = \frac{1}{g}\ d_\alpha\ g = d_\alpha$$

$$\chi^{reg}(G) = \sum_{\alpha=1}^{n_r} d_\alpha \chi^{(\alpha)}(G)$$

となり，これは，正則表現を簡約すると$\boldsymbol{G}$のすべての既約表現がその次元数に等しい数だけ現われるという面白い事実を告げています。

さらに，$G = E$ の場合には

$$\chi^{reg}(E) = g = \sum_{\alpha=1}^{n_r} d_\alpha \chi^{(\alpha)}(E) = \sum_{\alpha=1}^{n_r} d_\alpha^2$$

という結果が得られます。これで (7.1.5) が証明されました。

E を除く他のGについては

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} d_\alpha \chi^{(\alpha)}(G) = 0$$

です。指標は$C_1 = E$ を含めて類の関数だから，以上の性質をまとめて次のようにも書けます。

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} d_\alpha \chi^{(\alpha)}(C_i) = g\delta_{i1} \qquad (\text{7A.35})$$

◎ [指標の間の第 2 直交関係の証明]

7.1 で保留した (7.1.8) の証明にはかなりの工夫が必要です。群**G**の既約表現αの表現行列$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)$の，類C_i に属する元

$$G_{i,1}, G_{i,2}, \cdots\cdots, G_{i,m}, \cdots\cdots, G_{i,g_i} \qquad (*)$$

についての次のような和を定義します：

$$\mathbf{A}_i^{(\alpha)} = \sum_{m=1}^{g_i} \mathbf{D}^{(\alpha)}(G_{i,m}) \qquad (7A.36)$$

$\mathbf{A}_i^{(\alpha)}$は類が与えられれば決まる量，いわゆる類関数であり，構造的には，まえに＋記号で集合を表わした類の表式

$$C_i = \sum_{m=1}^{g_i} G_{i,m} \qquad (*)$$

と平行して考えられる量であることに注意します。

群**G**の任意の元Gについて，前出のように

$$G^{-1} C_i G = C_i$$

ですから，(*) のすべてについて和をとることと

$$G^{-1}G_{i,1}G,\ G^{-1}G_{i,2}G, \cdots\cdots, G^{-1}G_{i,m}G, \cdots\cdots, G^{-1}G_{i,g_i}G$$

について和をとることとは同じです。それで$\mathbf{A}_i^{(\alpha)}$を次の形に変形できます：

$$\mathbf{A}_i^{(\alpha)} = \sum_{m=1}^{g_i} \mathbf{D}^{(\alpha)}(G^{-1}G_{i,m}G) = \sum_{m=1}^{g_i} \mathbf{D}^{(\alpha)}(G^{-1})\mathbf{D}^{(\alpha)}(G_{i,m})\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)$$

$$= \mathbf{D}^{(\alpha)}(G^{-1}) \sum_{m=1}^{g_i} \mathbf{D}^{(\alpha)}(G_{i,m})\ \mathbf{D}^{(\alpha)}(G)$$

ここで　$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G^{-1}) = \left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^{-1}$ に注意すれば

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\mathbf{A}_i^{(\alpha)} = \mathbf{A}_i^{(\alpha)}\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)$$

したがってシュールの補助定理 (1) から$\mathbf{A}_i^{(\alpha)}$は

$$\mathbf{A}_i^{(\alpha)} = \lambda_i^{(\alpha)}\mathbf{E} \qquad (7A.37)$$

という形であり，**E** の次元は$\mathbf{D}^{(\alpha)}$の次元d_αと同じであることが結論できます。両辺の跡（ trace ）をとると，類C_i の元については$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G_{i,m})$ の跡は同じですから

$$g_i \chi^{(\alpha)}(C_i) = \lambda_i^{(\alpha)} d_\alpha$$

となって，

$$\lambda_i^{(\alpha)} = \frac{g_i}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}(C_i) \qquad (7A.38)$$

という結果が得られます。

次にC_i と異なる類 C_j についても (7A.36) の和を定義して

$$\mathbf{A}_i^{(\alpha)}\mathbf{A}_j^{(\alpha)} = \sum_{m=1}^{g_i}\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G_{i,m}\right)\sum_{n=1}^{g_j}\mathbf{D}^{(\alpha)}\left(G_{j,n}\right)$$

という積を作ると，前の (7A.36) と (**) を付けた式の間の類似と同じく，上の式の右辺はC_iC_j に平行する積だから

$$C_iC_j = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij.p}C_p$$

に対応して

$$\mathbf{A}_i^{(\alpha)}\mathbf{A}_j^{(\alpha)} = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij,p}\mathbf{A}_p^{(\alpha)}$$

が得られます。ここで(7A.37) から得られる

$$\mathbf{A}_i^{(\alpha)} = \lambda_i^{(\alpha)}\mathbf{E} \qquad \mathbf{A}_j^{(\alpha)} = \lambda_j^{(\alpha)}\mathbf{E} \qquad \mathbf{A}_p^{(\alpha)} = \lambda_p^{(\alpha)}\mathbf{E}$$

を代入すると，$\mathbf{E}$ は次元d_α の単位行列だから

$$\lambda_i^{(\alpha)}\lambda_j^{(\alpha)} = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij,p}\lambda_p^{(\alpha)}$$

(7A.38) を代入して

$$\frac{g_i}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}\left(C_i\right)\frac{g_j}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}\left(C_j\right) = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij,p}\frac{g_p}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}\left(C_p\right)$$

$$g_ig_j\chi^{(\alpha)}\left(C_i\right)\chi^{(\alpha)}\left(C_j\right) = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij,p}\quad g_p\quad d_\alpha\chi^{(\alpha)}\left(C_p\right)$$

両辺をα について，つまり**G** の既約表現について和をとると

$$g_ig_j\sum_{\alpha=1}^{n_r}\chi^{(\alpha)}\left(C_i\right)\chi^{(\alpha)}\left(C_j\right) = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij,p}\quad g_p\quad\sum_{\alpha=1}^{n_r} d_\alpha\chi^{(\alpha)}\left(C_p\right)$$

右辺のα についての和は (7A.35) の和ですから

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} d_\alpha\chi^{(\alpha)}\left(C_p\right) = g\delta_{p1}$$

$$g_ig_j\sum_{\alpha=1}^{n_r}\chi^{(\alpha)}\left(C_i\right)\chi^{(\alpha)}\left(C_j\right) = \sum_{p=1}^{n_c} c_{ij,p}\,g_p g\delta_{p1}$$

$$= c_{ij,1}g \qquad \left(\because\quad C_1 = E \qquad g_1 = 1\right)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r}\chi^{(\alpha)}\left(C_i\right)\chi^{(\alpha)}\left(C_j\right) = c_{ij,1}\frac{g}{g_ig_j}$$

$c_{ij,1}$については前に調べてあり，(7A.29) から

$C_j = C_{i'}$ の時は $c_{ij,1} = g_i$

ですから，上の式は

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} \chi^{(\alpha)}(C_i)\chi^{(\alpha)}(C_j) = \frac{g}{g_i} \qquad (***)$$

また,

$$C_j \neq C_{i'} \quad \text{の時は} \quad c_{ij,1} = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} \chi^{(\alpha)}(C_i)\chi^{(\alpha)}(C_j) = 0$$

しかし，表式としては,

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} \chi^{(\alpha)}(C_i)\chi^{(\alpha)}(C_{j'}) = 0 \qquad C_{i'} \neq C_{j'} \qquad (****)$$

と書いても内容的には全く同じことです。ところで，$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)$ のユニタリー性から

$$\mathbf{D}^{(\alpha)}(G^{-1}) = \left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^{-1} = \left[\mathbf{D}^{(\alpha)}(G)\right]^{\dagger}$$

転置によって指標は変らないので，一般に

$$\chi^{(\alpha)}(G^{-1}) = \left[\chi^{(\alpha)}(G)\right]^{*} \qquad \chi^{(\alpha)}(C_{p'}) = \left[\chi^{(\alpha)}(C_p)\right]^{*}$$

したがって，式 (***) は

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} \chi^{(\alpha)}(C_i)\left[\chi^{(\alpha)}(C_i)\right]^{*} = \frac{g}{g_i}$$

式 (****) は

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} \chi^{(\alpha)}(C_i)\left[\chi^{(\alpha)}(C_j)\right]^{*} = 0$$

と書けます。この両方の式をまとめると

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r} \chi^{(\alpha)}(C_i)\left[\chi^{(\alpha)}(C_j)\right]^{*} = \frac{g}{g_i}\delta_{ij}$$

この式の複素共役をとれば (7.1.8) が得られます。公式としては複素共役をとらない形でもよいのです。